УДК 514.75

*А. В. Кулешов*

## ЛИНЕЙНАЯ И ЦЕНТРОПРОЕКТИВНАЯ ФАКТОР-ГРУППЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГРУППЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Рассмотрена задача построения центропроективной группы путем факторизации дифференциальной группы 2-го порядка.*

*The problem of constructing of center-projective group by factorization of the second order differential group is considered.*

**Ключевые слова:** струя, дифференциальная группа, расслоение реперов, центропроективная группа.

**Key words:** jet, differential group, frame, bundle, center-projective group.

### 1. Постановка задачи

Г. Ф. Лаптев в работе [3] описал две последовательности главных расслоений на произвольном дифференцируемом многообразии $M_n$: *гладкие* и *проективные структуры*. Их структурными группами служат дифференциальные и проективно-дифференциальные группы соответственно: $D_n^p$, $PD_n^p$, $p = 1, 2, \ldots$ Из группы 2-го порядка $D_n^2$ выделяются две фактор-группы 1-го порядка: $D_n^1$ и $PD_n^1$. $D_n^1 = GL(n)$ — полная линейная групп, а $PD_n^1 = GP^*(n)$ — центропроективной группой.

Дифференциальные группы и расслоения реперов высших порядков описаны на языке теории струй Ш. Эресмана (см., напр.: [1], [2]).

Опишем построение центропроективной фактор-группы факторизацией элементов дифференциальной группы 2-го порядка $G^2(n)$.

## 2. Предварительные сведения из теории групп Ли



Пусть $G_r$ — $r$-параметрическая группа Ли.

**Утверждение 1**. *Пусть* $U \subset R^n$ – *пространство параметров группы Ли, групповая операция в которой выражается функциями* $\tilde{u}^\alpha = \mu^\alpha(s^\beta, u^\gamma)$. *Тогда формы* $\omega^\alpha = \chi^\alpha_\beta(u)du^\beta$, *где матрица* $(\chi^\alpha_\beta(s))$ *обратна для матрицы* $\left.\left(\dfrac{\partial\mu^\alpha(u,\, s)}{\partial u^\beta}\right)\right|_{u=e}$, *инвариантны относительно левых сдвигов на группе* $G_r$.

**Утверждение 2**. *Структурные уравнения* $r$*-параметрической группы Ли* $G_r$: $d\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma$, *где* $\omega^\alpha$ *– ее левоинвариантные формы* ($\alpha = \overline{1, r}$).

**Утверждение 3**. *Подмножество* $H \subset G_r$ *содержащее единицу группы* $G_r$, *подгруппа в* $G_r$ *тогда и только тогда, когда оно является интегральным многообразием некоторой вполне интегрируемой системы Пфаффа, составленной из левоинвариантных форм* $\omega^\alpha$ *группы* $G_r$ *с постоянными коэффициентами:* $h^i_\alpha\omega^\alpha = 0$ ($i = \overline{1, s}$, где $s = r - \dim H$).

**Утверждение 4**. *Для того чтобы вполне интегрируемая система с постоянными коэффициентами из левоинвариантных форм группы* $\theta^i \equiv h^i_\alpha\omega^\alpha$ *выделяла нормальный делитель, необходимо и достаточно, чтобы внешние дифференциалы форм* $\theta^i$ *выражались лишь через эти формы:* $d\theta^i = \gamma^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k$.

**Замечание**. При этом уравнения (1) — структурные уравнения фактор-группы $G_r/H$.

## 3. Описание дифференциальных групп на языке струй

Пусть *M* есть *n*-мерное дифференцируемое многообразие. Если *U* и *V* — две окрестности начала 0 в $R^n$, то два отображения *p-эквивалентны в точке* 0, если в ней они имеют одинаковые частные производные до порядка *p* включительно. Легко проверить, что данное определение инвариантно относительно выбора локальных координат как в $R^n$, так и в *M*, а потому оно определяет некоторый геометрический объект — струю отображения. А именно: струя порядка *p*, задаваемая отображением *f*, является классом эквивалентности отображений по вышеуказанному отношению и обозначается $j_0^p(f)$. Если *f* есть диффеоморфизм окрестности начала 0 на открытое подмножество из *M*, то *p*-струя $j_0^p(f)$ называется *репером p-го порядка* $r_x^p$ *в точке* $x = f(0)$.

Дифференциальная группа $p$-го порядка $G^p(n)$ образована множеством реперов $p$-го порядка $J_0^p(g)$ в точке $0 \in R^n$, где $g$ — диффеоморфизм окрестностей точки 0 в $R^n$. Тогда $G^p(n)$ есть группа с умножением, определяемым композицией струй, т. е. $J_0^p(g) \circ J_0^p(h) = J_0^p(g \circ h)$. Ее нейтральный элемент — струя тождественного отображения. Обратный элемент к $J_0^p(g)$ есть $p$-струя отображения, обратного к $g$.

Репер 1-го порядка $r_0^1$ можно отождествить с векторным репером $\vec{e}_i$ пространства $R^n$. Группа $G^1(n)$ канонически изоморфна группе $GL(n)$.

Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — естественный базис в $R^n$, $x = x^i \varepsilon_i \mapsto (x^1, \ldots, x^n)$ — естественная система координат в $R^n$. Каждый репер 2-го порядка $u$ пространства $R^n$ имеет единственное полиномиальное представление вида

$$f(x) = \left(u_j^i x^j + (1/2) u_{jk}^i x^j x^k\right) \varepsilon_i , \tag{1}$$

где $x = x^i \varepsilon_i$, а наборы $(u_j^i ; u_{jk}^i)$ — естественные глобальные координаты в $G^2(n)$: $u = j_0^2(f) \mapsto (u_j^i ; u_{jk}^i)$. Отождествляя 2-репер и его координаты, рассмотрим группу $G^2(n)$ как множество наборов $G^2(n) = \{(u_j^i ; u_{jk}^i):$ $\det(u_j^i) \neq 0, u_{jk}^i = u_{kj}^i\}$ с операцией умножения, описанной ниже.

**Утверждение 5**. *Умножение в группе $G^2(n)$ имеет вид*

$$(s_j^i ; s_{jk}^i)(u_j^i ; u_{jk}^i) = (\tilde{u}_j^i ; \tilde{u}_{jk}^i) , \tag{2}$$

$$\tilde{u}_j^i = s_p^i u_j^p , \tilde{u}_{jk}^i = s_p^i u_{jk}^p + s_{qr}^i u_j^q u_k^r . \tag{3}$$

**Следствие**. 1) *Нейтральный (единичный) элемент имеет вид* $e = (\delta_j^i ; 0)$.

2) *Для каждого репера $(s_j^i ; s_{jk}^i)$ из $G^2(n)$ обратный ему репер имеет вид*

$$(s_j^{*i} ; \ -s_{pq}^r s_r^{*i} s_j^{*p} s_k^{*q}) , \tag{4}$$

*где $s_j^{*i}$ – элементы матрицы, обратной к $s_j^i$.*

**Замечание**. $G^2(n)$ можно представить в матричном виде [4]: каждому ее элементу $(u_j^i ; u_{jk}^i)$ сопоставим матрицу $\left(\begin{array}{c|c} u_j^i & u_{jm}^i \\ \hline 0 & u_j^i u_m^k \end{array}\right)$, где пары индексов $(i, k)$ нумеруют ее строки, а пары $(j, m)$ — столбцы. Тогда умножение (2), (3) в $G^2(n)$ будет обычным умножением матриц.

## 4. Нахождение инвариантных форм и структурных уравнений дифференциальной группы 2-го порядка

Следуя [2], найдем левоинвариантные формы и выведем структурные уравнения группы $G^2(n)$. Из (3) выразим $s_j^i$ и $s_{jk}^i$:

$$s_j^i = \tilde{u}_k^i u_j^{*k} , \quad s_{jk}^i = \left(\tilde{u}_{pq}^i - \tilde{u}_l^i u_m^{*l} u_{pq}^m\right) u_j^{*p} u_k^{*q} . \tag{5}$$

Рассмотрим голономные кобазисы к группе $G^2(n)$ в точках $u$ и $\tilde{u}$: $\{du^i_j, du^i_{jk}\}, \{d\tilde{u}^i_j, d\tilde{u}^i_{jk}\}$, $j \le k$. Формулы (3) при фиксированных $s^i_j$, $s^i_{jk}$ можно рассматривать как координатные выражения левого сдвига $L_S$ на элемент $J_2$. Тогда дифференциал отображения $L_S$ имеет следующий вид:

$$d\tilde{u}^i_j = s^i_k du^k_j\,,\; d\tilde{u}^i_{pq} = s^i_j du^j_{pq} + s^i_{jk}\left(du^j_p u^k_q + u^j_p du^k_q\right). \tag{6}$$

Подставим (5) в (6) и преобразуем полученные соотношения:

$$\theta^i_j(u,du) = \theta^i_j(\tilde{u},d\tilde{u})\,,\; \theta^i_{jk}(u,du) = \theta^i_{jk}(\tilde{u},d\tilde{u})\,, \tag{7}$$



$$\theta^i_j(u,du) = u^{*i}_k du^k_j(\pi/2-0)\,,\; \theta^i_{jk}(u,du) = u^{*i}_p(du^p_{jk} - u^p_{km}\theta^m_j - u^p_{jm}\theta^m_k). \tag{8}$$

**Утверждение 5**. *Формы (8) – левоинвариантные формы группы* $G^2(n)$.

Дифференцируя (8), получим структурные уравнения

$$d\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k\,, \tag{9}$$

$$d\theta^i_{jk} = \theta^m_{jk} \wedge \theta^i_m - \theta^i_{jm} \wedge \theta^m_k - \theta^i_{mk} \wedge \theta^m_j\,. \tag{10}$$

**Замечание**. Уравнения (9), (10) совпадают со структурными уравнениями 2-го порядка $D^2_n$ в работе Г. Ф. Лаптева [3].

## 5. Выделение центропроективной фактор-группы

Рассмотрим формы

$$\theta_i = \theta^k_{ik}\,. \tag{11}$$

Структурные уравнения на них получаются свертыванием уравнений (10) по верхнему и нижнему индексам и имеют вид

$$d\theta_i = \theta^k_i \wedge \theta_k\,. \tag{12}$$

Из выражении (9) и (12) следует, что равенства

$$\theta^i_j = 0\,,\; \theta_i = 0 \tag{13}$$

суть уравнения нормального делителя $M(n)$ группы $G^2(n)$. Подставляя (8) и (11) в (13), получим систему $n^2+n$ линейных однородных уравнений с $n^2+(1/2)n^2(n+1)$ неизвестными $du^k_i$, $du^k_{ij}$ с $n+1$ подсистемой

$$u^{*i}_k du^k_1 = 0\,,\;\ldots,\; u^{*i}_k du^k_n = 0\,,\quad u^{*k}_p du^p_{ik} = 0 \tag{14}$$

с невырожденной матрицей коэффициентов $u^{*i}_k$. Из первых $n$ подсистем получим $du^k_j = 0$. Итак, координаты $u^i_j$ – первые интегралы этих подсистем, значит, и всей системы (14). Поэтому для элементов группы $u^i_j = \mathrm{const}.$. При этом группа $M(n)$ должна содержать единичный элемент $e = (\delta^i_j; 0)$. Иными словами, для любого элемента группы первые $n^2$ координат

$$u^i_j = \delta^i_j\,. \tag{15}$$

Подставляя их в $(n+1)$-ю подсистему (14), получим $\delta_p^k du_{ik}^p = 0$, т. е. $du_{ik}^k = 0$. Таким образом, величины $u_{jk}^k$ также являются первыми интегралами системы (14), и для элементов группы имеем

$$u_{ik}^k = \text{const} . \tag{16}$$

При этом группа $M(n)$ содержит единичный элемент с координатами $u_{jk}^i = 0$, поэтому для элементов данной группы $u_{ik}^k = 0$. Получаем

**Утверждение 6**. *Подгруппа* $M(n)$ *группы* $G^2(n)$, *выделяемая уравнениями (13), является ее нормальным делителем и состоит из элементов вида* $(\delta_j^i; u_{jk}^i)$, *где* $u_{jk}^i$ *– произвольные числа, симметричные по нижним индексам и удовлетворяющие условию (16)* $M(n) = \{(\delta_j^i; u_{jk}^i):\ u_{jk}^i = u_{kj}^i,\ u_{jk}^k = 0\}$.



Группа $M(n)$ имеет структурные формы $\theta_{jk}^i$, но в силу второй серии уравнений (13) не все они линейно независимы. Из выражения (19) получим структурные уравнения группы $d\theta_{jk}^i = 0$, то есть группа $M(n)$ — абелева.

Умножение в группе получается из общей формулы (2) подстановкой в нее (15): $(\delta_j^i; s_{jk}^i)(\delta_j^i; u_{jk}^i) = (\delta_j^i; u_{jk}^i + s_{jk}^i)$. Элемент, обратный к элементу $(\delta_j^i; s_{jk}^i)$, равен $(\delta_j^i;\ -s_{jk}^i)$.

Т. к. $M(n)$ — нормальный делитель, определена фактор-группа $G^2(n)/M(n)$ с формами $\theta_j^i$, $\theta_i$ и уравнениями (9), (12). Правые классы смежности $M(n)(u_j^i; u_{jk}^i)$ задаются отношением эквивалентности между $(s_j^i; s_{jk}^i), (u_j^i; u_{jk}^i)$ группы $G^2(n)$ с условием $(s_j^i; s_{jk}^i)(u_j^i; u_{jk}^i)^{-1} \in M(n)$, которое с учетом (5), (15) и (16) принимает вид

$$s_j^i = u_j^i,\ (s_{jq}^k - u_{jq}^k) s_k^{*q} = 0 . \tag{17}$$

Элементы $G^2(n)/M(n)$ — правые классы смежности, и с учетом (17)

$$[(u_j^i; u_{jk}^i)] = M(n)(u_j^i; u_{jk}^i) = \{(u_j^i; s_{jk}^i):\ s_{jk}^i = s_{kj}^i,\ (s_{jq}^k - u_{jq}^k) u_k^{*q} = 0\} .$$

**Замечание.** Левые классы смежности $(u_j^i; u_{jk}^i)M(n)$ определяются тем же самым отношением эквивалентности, потому что подгруппа $M(n)$ — нормальный делитель группы $G^2(n)$.

Равенства (17) можно переписать в виде

$$s_j^i = u_j^i,\ s_{jm}^k s_k^{*m} = u_{jm}^k u_k^{*m}, \tag{19}$$

и в качестве координат элементов факторгруппы примем $u_j^i$, $u_j$, где

$$u_j = u_{jm}^k u_k^{*m} . \tag{20}$$

Тогда положим $[(u_j^i; u_{jk}^i)] = (u_j^i; u_j)$. Таким образом, получаем

**Утверждение 7**. $G^2(n)/M(n)$ *образована классами смежности, которые определяются наборами параметров* $(u_j^i; u_j)$: $(u_j^i; u_j) = \{(u_j^i; u_{jk}^i):\ u_{jm}^k \overset{*}{u}{}_k^m = u_j\}$.

**Утверждение 8**. *Умножение в фактор-группе* $G^2(n)/M(n)$ *имеет вид*

$$(s_j^i; s_j)(u_j^i; u_j) = (s_k^i u_j^k; u_j + s_k u_j^k) . \tag{21}$$

**Следствие**. *1) Единичный элемент* $e=(\delta^i_j;0)$. *2) Для любого элемента* $(s^i_j;s_j)$ $G^2(n)/M(n)$ *существует единственный обратный элемент* $(s^{*i}_j;-s_k s^k_j)$.

**Замечание**. $G^2(n)/M(n)$ можно представить в матричном виде [4]: каждому ее элементу $(u^i_j;u_j)$ сопоставим матрицу $\left(\begin{array}{c|c} u^i_j & 0 \\ \hline u_j & 1 \end{array}\right)$. Тогда умножение (21) в этой группе будет обычным умножением матриц.

## 6. Изоморфизм групп $G^2(n)/M(n)$ и $GP^*(n)$



Рассмотрим вещественное проективное пространство $RP^n$, точки которого определяются однородными координатами $(x^0:x^1:\ldots:x^n)$. Обозначим $GP^*(n)$ центропроективную группу, действующую в $RP^n$.

Каждому элементу $s=(s^i_j,s_i)\in G^2(n)/M(n)$ поставим в соответствие центропроективное преобразование $f_s$ пространства $P_n$, действующее по закону $\rho y^0=x^0+s_i x^i$, $\rho y^i=s^i_j x^j$, $\rho\neq 0$.

**Утверждение 9**. *Отображение* $\phi: s\to f_s$ является изоморфизмом групп $G^2(n)/M(n)$ и $GP^*(n)$.

Таким образом, реализована конструкция центропроективной группы как фактор-группы дифференциальной группы 2-го порядка.

### Список литературы


1. *Евтушик Л. Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Труды геометрического семинара. М., 1963. Т. 2. С. 119—150.
2. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.
3. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.
4. *Лумисте Ю. Г.* Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения *p*-кореперов // Труды геометрического семинара. М., 1974. Т. 5. С. 239—257.


### Об авторе

Артур Владимирович Кулешов — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: arturkuleshov@yandex.ru

### About the author

Artur Kuleshov — high instructor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: arturkuleshov@yandex.ru